বীজগাণিতিক সূত্রাবলি

সাধারণ গণিত

Shanda

বীজগণিত

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলিঃ

বর্গ সম্পর্কিত সূত্রাবলিঃ

সূত্র-১ঃ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সূত্র-২ঃ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

সূত্র-৩ঃ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

সূত্র-৪ঃ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

সূত্র-৫ঃ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

অনুসিদ্ধান্তসমুহঃ

অনুসিদ্ধান্ত-১ঃ $a^2 + b^2 = \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab \\ (a-b)^2 + 2ab \end{cases}$

অনুসিদ্ধান্ত-২ঃ $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত-৩ঃ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত-৪ঃ $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$

অথবা, $a^2 + b^2 = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত-৫ঃ $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

অথবা, $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

অনুসিদ্ধান্ত-৬ঃ $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

অথবা, $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

ঘন সম্পর্কিত সূত্রাবলিঃ

সূত্র-১ঃ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

সূত্র-২ঃ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

সূত্র-৩ঃ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

সূত্র-৪ঃ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

সূত্র-৫ঃ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (ab+bc+ca)x + (a+b+c)x^2 + abc$

অনুসিদ্ধান্তসমূহঃ

অনুসিদ্ধান্ত-১ঃ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

অনুসিদ্ধান্ত-২ঃ $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

সূচকের সূত্রাবলিঃ

a শুণ্য ব্যতীত যে কোন সংখ্যা এবং m, n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

১) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

২) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

৩) $(a^m)^n = a^{mn}$

৪) $a^o = 1$

৫) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

লগারিদমঃ

যদি $a^x = N$ হয় $(a > 0,\ a \neq 1)$, তাহলে x কে n এর a ভিত্তিক লগারিদম বা লগ বলা হয় এবং উহাকে নিম্নরূপে লেখা যায়-

$$x = \log_a N$$

লগারিদমের সূত্রাবলিঃ

১) $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$

২) $\log_a(M \div N) = \log_a M - \log_a N$

৩) $\log_a a = 1$

৪) $\log_a M^r = r \log_a M$

৫) $\log_a 1 = 0$

৬) $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [ভিত্তি পরিবর্তন]

** শুন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নেই।

(i) $\log(M+N) \neq \log M + \log N$

(ii) $(\log_a M)^r \neq r \log_a M$

লগারিদম পদ্ধতিঃ দুই ধরণের

১) স্বাভাবিক লগারিদম - e ভিত্তিক লগারিদম। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

২) সাধারণ লগারিদম - 10 ভিত্তিক লগারিদম বা ব্যবহারিক লগারিদমও বলা হয়। $\log x$ আকারে লেখা হয়।

জেনে রাখা ভালো

১) 10 ভিত্তিক লগারিদমের মান নির্ণয়ে calculator এর $\log$ বোতাম ব্যবহার করতে হয়।

২) e ভিত্তিক লগারিদমের মান নির্ণয়ে calculator এর $\ln$ বোতাম ব্যবহার করতে হবে।

সসীম ধারাঃ

$a+(a+d)+(a+2d)+$ ------- $+(n$ সংখ্যক পদ) একটি সমান্তর ধারা।

এই সমান্তর ধারায় প্রথম পদ $=a$

সাধারণ অন্তর $=d$

পদ সংখ্যা $=n$

$\therefore n$ তম পদ $=a+(n-1)d$

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টিঃ

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টিঃ

$$1+2+3+\text{--------}+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টিঃ

n তম বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা $=2n-1$

$$1+3+5+\text{----------}+(2n-1)=n^2$$

স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিঃ

$$1^2+2^2+3^2+\text{---------}+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টিঃ

$$1^3+2^3+3^3+\text{--------}+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টিঃ

$$2+4+6+\text{----------}+2n=n(n+1)$$

** সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে তাকে অসীম বা অনন্তধারা বলে।

যেমনঃ $1+4+7+10+\ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অসীম ধারা।

জ্যামিতি

প্রতিজ্ঞাঃ জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা, ক্ষেত্র ইত্যাদি অঙ্কন বা প্রমাণের জন্য প্রস্তাবকে প্রতিজ্ঞা বলে।

প্রতিজ্ঞা দুই প্রকারঃ (১) উপপাদ্য, (২) সম্পাদ্য

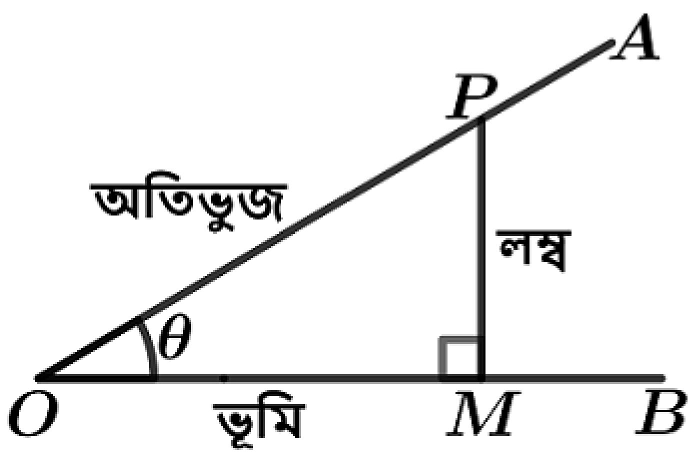
প্রতিজ্ঞার চারটি অংশঃ (১) সাধারণ নির্বচন, (২) বিশেষ নির্বচন, (৩) অঙ্কন, (৪) প্রমাণ।

লক্ষ্যণীয়ঃ

সাধারণ নির্বচন ও বিশেষ নির্বচনের মাঝে চিত্র দিতে হবে। [চিত্র ডান অংশে ব্যবহার করা যেতে পারে, তবে প্রমাণ অংশের উপরে অবশ্যই]।

ত্রিকোণমিতি

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতঃ



এই সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় নিয়ে ছয়টি অনুপাত গঠন করা যায়।

$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}$ ও $\frac{OM}{PM}$ এই অনুপাতগুলোকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়।

এক নজরেঃ

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}, & \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}, & \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} \\ \text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}, & \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}, & \cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}. \end{array}}$$

অনুপাতগুলোর মধ্যে সম্পর্কঃ

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta} \qquad \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{আবার, } \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{আবার, } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে যে সম্পর্ক পাওয়া যায় তা হলোঃ-

১) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ এবং $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

২) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ এবং $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

৩) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ এবং $\text{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের মান নির্ণয়ঃ

কোণ অনুপাত	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

উপরোক্ত কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায়ঃ

(i) $0, 1, 2, 3$ এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গ মূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^o, \sin 30^o, \sin 45^o, \sin 60^o$ এবং $\sin 90^o$ এর মান পাওয়া যায়।

যেমন, $\sin 60^o = \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

(ii) $4, 3, 2, 1$ এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গ মূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^o, \cos 30^o, \cos 45^o, \cos 60^o$ এবং $\cos 90^o$ এর মান পাওয়া যায়।

যেমন, $\cos 45^o = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iii) $0, 1, 3$ এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গ মূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^o, \tan 30^o, \tan 45^o$, এবং $\tan 60^o$ এর মান পাওয়া যায়।

যেমন, $\tan 30^o = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

বিঃ দ্রঃ শুন্য (0) দ্বারা কোন কিছুকে ভাগ করলে অসংজ্ঞায়িত হয়। যেমন- $\frac{2}{0}, \frac{1}{0}$ ইত্যাদি অসংজ্ঞায়িত।

পরিমিতি

কয়েকটি সরল রৈখিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও অন্যান্য পরিমাপসমূহঃ

ত্রিভুজঃ

১ঃ যদি কোনো ত্রিভুজের ভূমি $= b$ একক এবং উচতা $= h$ একক হয় তবে,

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \left(\frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}\right) \text{ বর্গ একক}$$
$$= \frac{1}{2} bh \text{ বর্গ একক}$$

২ঃ যদি কোনো ত্রিভুজের দুই বাহু যথাক্রমে a একক ও b একক এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হয় তবে,

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} ab \sin\theta \text{ বর্গ একক}$$

৩ঃ যদি কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে a একক, b ও c একক হয় তবে,

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ বর্গ একক}$$

যেখানে, $s = \frac{a+b+c}{2}$ ($s =$অর্ধ-পরিসীমা)

৪ঃ যদি কোনো সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হয় তবে,

$$\text{সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ বর্গ একক}$$

৫ঃ যদি কোনো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a একক এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য b হয় তবে,

$$\text{সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} \text{ বর্গ একক}$$

চতুর্ভুজঃ

১ঃ কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a একক এবং প্রস্থ b একক হলে,

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ab$ বর্গ একক

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2}$ একক

এবং পরিসীমা $= 2(a+b)$ একক

২ঃ কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে,

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক

বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$ একক

এবং পরিসীমা $= 4a$ একক

৩ঃ কোনো সামান্তরিকের ভূমি a একক এবং উচ্চতা h একক হলে,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= ah$ বর্গ একক

সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

ক্ষেত্রফল $= ab \sin\theta$ বর্গ একক

৪ঃ কোনো রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d_1 একক ও d_2 একক হলে,

রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ বর্গ একক

৫ঃ কোনো ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a একক ও b একক হয় এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব h একক হলে,

ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}h(a+b)$ বর্গ একক

বৃত্তঃ

১ঃ কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক হলে,

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

যেখানে $\pi = \frac{22}{7}$ অথবা, 3.1416 ধরা হয়।

পরিধি $= 2\pi r$ একক

এবং ব্যাস $= 2r$ একক

২ঃ r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপের ডিগ্রী পরিমাপ θ তার দৈর্ঘ্য, $s = \frac{\pi r \theta}{180}$ একক

৩ঃ r একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360}\pi r^2$ বর্গ একক

আয়তিক ঘন ও ঘনকঃ

১ঃ আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b ও c একক হলে,

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

আয়তন $= abc$ ঘন একক

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

২ঃ ঘনকের প্রত্যেক ধার a একক হলে,

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গ একক

আয়তন $= a^3$ ঘন একক

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$ একক

এবং পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$ একক

৩ঃ কোনো কোণকের বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে,

কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গ একক

$= \pi r \sqrt{(h^2 + r^2)}$ বর্গ একক

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi r l + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= \pi r (l + r)$ বর্গ একক

এবং কোণকের আয়তন $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ঘন একক

৪ঃ কোনো বেলন বা সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে,

বেলনের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r h$ বর্গ একক

বেলনের সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r h + 2\pi r^2$

$= 2\pi r (h + r)$ বর্গ একক

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

৫ঃ গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হলে,

গোলক পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক

৬ঃ a একক দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{180^o}{n}\right)$ বর্গ একক